

1.13 ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

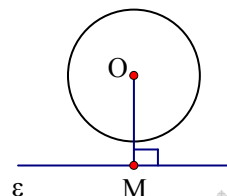
ΘΕΩΡΙΑ

1.

Εξωτερική ευθεία ενός κύκλου :

Ονομάζουμε οποιαδήποτε ευθεία που δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

Για να είναι η ευθεία (ε) εξωτερική, θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του κύκλου από αυτή να είναι μεγαλύτερη της ακτίνας. $OM > \rho$



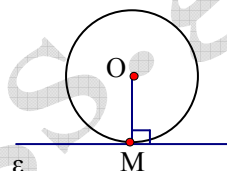
2.

Εφαπτομένη ευθεία ενός κύκλου :

Ονομάζουμε οποιαδήποτε ευθεία που έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο.

Για να είναι η ευθεία (ε) εφαπτομένη, θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του κύκλου από αυτή να είναι ίση με την ακτίνα. $OM = \rho$

Το σημείο M το λέμε σημείο επαφής.



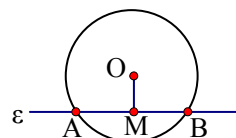
3.

Τέμνουσα ευθεία ενός κύκλου :

Ονομάζουμε οποιαδήποτε ευθεία που έχει με τον κύκλο δύο κοινά σημεία.

Για να είναι η ευθεία (ε) τέμνουσα θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του κύκλου από αυτή να είναι μικρότερη της ακτίνας. $OM < \rho$

Τα σημεία A και B τα λέμε σημεία τομής



ΣΧΟΛΙΑ

1.

Εφαπτομένη και ακτίνα :

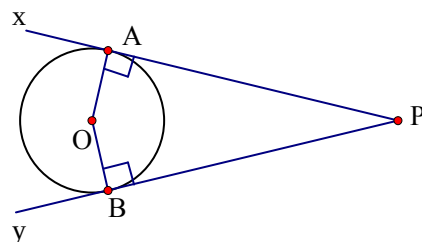
Η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής.

Οπότε, για να σχεδιάσω την εφαπτομένη ενός κύκλου σε κάποιο σημείο του, φέρνω την ακτίνα στο σημείο αυτό και στη συνέχεια κάθετο στο άκρο της ακτίνας.

2.

Εφαπτόμενα τμήματα :

Αν οι Px , Py είναι εφαπτομένες του κύκλου, με A, B σημεία επαφής, τα τμήματα PA, PB τα λέμε εφαπτόμενα τμήματα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να σχεδιάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $A\Gamma = 4\text{cm}$ και $AB = 3$.
Με διάμετρο την $A\Gamma$ να γράψετε κύκλο.

- α) Να βρείτε τη σχετική θέση της πλευράς AB ως προς τον κύκλο αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) Αν η ευθεία (ϵ) είναι κάθετη στην AB στο σημείο B , να βρείτε τη θέση της (ϵ) ως προς τον κύκλο δικαιολογώντας την απάντησή σας

Προτεινόμενη λύση

Σχεδιάζουμε τρίγωνο $AB\Gamma$ κατά τα γνωστά και εντοπίζουμε το μέσο M της $A\Gamma$. Γράφουμε τον κύκλο $(M, \rho = 2\text{ cm})$, οπότε η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου.

α)

Αφού $MA \perp AB$, το τμήμα MA ισούται με την απόσταση του κέντρου M του κύκλου από την ευθεία AB .

Δηλαδή έχουμε απόσταση ίση με την ακτίνα, άρα η AB είναι εφαπτομένη.

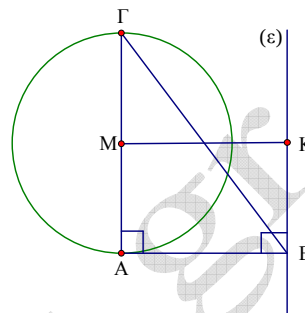
β)

Επειδή $\Gamma A \perp AB$ και $(\epsilon) \perp AB$ θα είναι $A\Gamma \parallel (\epsilon)$.

Το τμήμα AB είναι κάθετο στις παράλληλες και έχει τα άκρα του σε αυτές, επομένως είναι η απόσταση των δύο παραλλήλων.

Και επειδή $AB = 3\text{ cm}$, η απόσταση των δύο παραλλήλων είναι 3cm , επομένως και η απόσταση MK του M από την (ϵ) είναι $MK = 3\text{cm}$

Άρα απόσταση $MK > \rho$. Οπότε η (ϵ) είναι εξωτερική ευθεία του κύκλου.



2.

Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 3\text{cm}$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 50^\circ$.

Να φέρετε τις διχοτόμους των γωνιών αυτών και να ονομάσετε K το σημείο τομής τους. Επίσης να φέρεται την απόσταση KL του K από την $B\Gamma$ και να γράψετε τον κύκλο (K, KL) . Τι παρατηρείτε για την θέση των πλευρών του τριγώνου ως προς τον κύκλο;

Προτεινόμενη λύση

Σχεδιάζουμε ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma = 3\text{cm}$

και με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου κατασκευάζουμε προς το ίδιο μέρος του $B\Gamma$

γωνίες $x\hat{B}\Gamma = 60^\circ$ και $y\hat{\Gamma}B = 50^\circ$

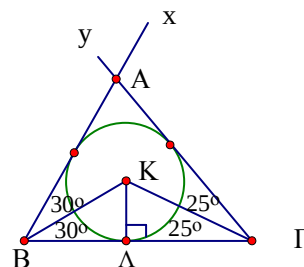
Ονομάζουμε A το σημείο τομής των Bx , Γy .

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει τα καθορισμένα στοιχεία

Σχεδιάζουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

και φέρουμε το τμήμα $KL \perp B\Gamma$. Τέλος γράφουμε τον κύκλο (K, KL)

Παρατηρούμε ότι οι πλευρές του τριγώνου εφάπτονται του κύκλου.



3.

Στα άκρα μιας χορδής $AB = 3\text{cm}$ ενός κύκλου $(O, 2\text{cm})$ να φέρετε τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 και ονομάστε P το σημείο τομής τους.

α) Να συγκρίνεται τα ευθύγραμμο τμήματα PA και PB

β) Να μετρήσετε τις γωνίες που σχηματίζει η PO με τις PA και PB . Τι παρατηρείτε;

Προτεινόμενη λύση

Σχεδιάζουμε τον κύκλο $(O, 2\text{cm})$ και τη χορδή AB .

Φέρνουμε τις ακτίνες OA, OB ,

ευθεία $(\varepsilon_1) \perp OA$ στο A

και ευθεία $(\varepsilon_2) \perp OB$ στο B

Οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι εφαπτομένες.

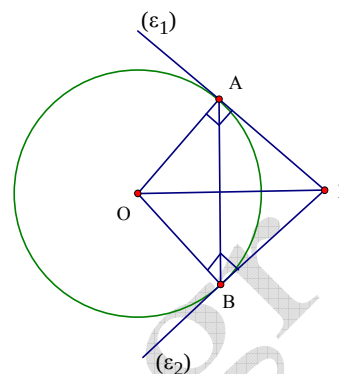
α)

Με το διαβήτη διαπιστώνουμε ότι $PA = PB$

β)

Με το μοιρογνωμόνιο διαπιστώνουμε ότι

$\hat{A}PO = \hat{B}PO$, δηλαδή ότι η PO είναι διχοτόμος της $\hat{APB}$



Σχόλιο 1

4.

Να σχεδιάσετε ευθύγραμμο τμήμα $AB = 4\text{cm}$ και να βρείτε σημείο του M τέτοιο ώστε $AM = 1\text{cm}$. Να κατασκευάσετε τους κύκλους $(A, 2\text{cm})$ και $(B, 1,5\text{cm})$. Στο σημείο M να φέρετε ευθεία (ε) κάθετη στο τμήμα AB . Ποια είναι η θέση της (ε) ως προς τους δύο κύκλους; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Προτεινόμενη λύση

Με βάση τα καθορισμένα στοιχεία έχουμε το διπλανό σχήμα.

Αφού $AM \perp (\varepsilon)$ και $BM \perp (\varepsilon)$, τα τμήματα AM και BM είναι οι αποστάσεις των A και B από την (ε) .

Για τον κύκλο κέντρου A έχουμε

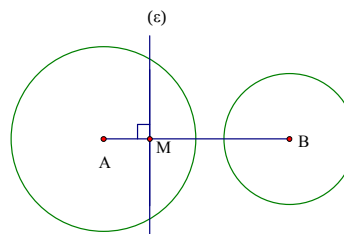
$$AM = 1\text{cm} < 2\text{cm} = \rho$$

επομένως η (ε) είναι τέμνουσα του κύκλου.

Για τον κύκλο κέντρου B έχουμε

$$BM = 3\text{cm} > 1,5\text{cm} = \rho$$

επομένως η (ε) είναι εξωτερική του κύκλου



5.

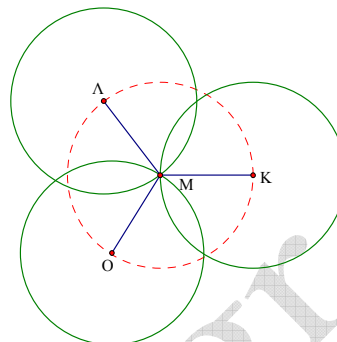
Έστω ένα σημείο M . Να σχεδιάσεις τρεις κύκλους με ακτίνα $\rho = 2 \text{ cm}$, οι οποίοι να διέρχονται από το M . Υπάρχουν άλλοι τέτοιοι κύκλοι; Αν υπάρχουν, που βρίσκονται τα κέντρα όλων αυτών των κύκλων;

Προτεινόμενη λύση

Με ένα άκρο το M και με τη βοήθεια του διαβήτη βρίσκουμε τρία σημεία K , Λ και O τέτοια ώστε $MK = M\Lambda = MO = 2 \text{ cm}$. Γράφουμε τους κύκλους (K, KM) , $(\Lambda, \Lambda M)$ και (O, OM) , που έχουν ακτίνα $\rho = 2 \text{ cm}$ και διέρχονται από το M .

Είναι φανερό ότι υπάρχουν άπειρα σημεία που απέχουν από το M απόσταση 2 cm , επομένως υπάρχουν άπειροι τέτοιοι κύκλοι.

Τα κέντρα όλων αυτών των κύκλων βρίσκονται στον κύκλο $(M, 2 \text{ cm})$ (κόκκινος)



6.

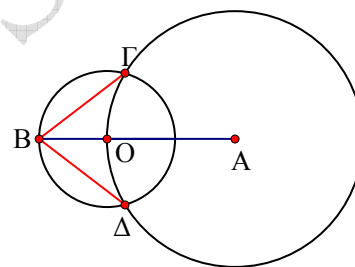
Σχεδιάστε έναν κύκλο κέντρου O και ένα σημείο A εκτός αυτού. Φέρετε το τμήμα OA .

Σχεδιάστε τον κύκλο (A, AO) , ο οποίος τέμνει τον πρώτο κύκλο σε σημεία Γ , Δ .

Προεκτείνετε το τμήμα AO μέχρι να τμήσει τον πρώτο κύκλο σε σημείο B .

Φέρετε τα τμήματα $B\Gamma$ και $B\Delta$.

Να συγκρίνετε τα τμήματα αυτά. Τι παρατηρείτε;



Προτεινόμενη λύση .

Όλα τα ζητούμενα φαίνονται στο δίπλα σχήμα

Διαπιστώνουμε ότι $B\Gamma = B\Delta$

Σχόλιο 1

7.

Να σχεδιάσεις τις εφαπτομένες στα άκρα δύο όχι κάθετων διαμέτρων ενός κύκλου και να τις προεκτείνεις μέχρι να τμηθούν ανά δύο.

Να δικαιολογήσεις γιατί οι πλευρές του σχηματιζόμενου τετράπλευρου είναι ανά δύο απέναντι παράλληλες. Μήπως όλες οι πλευρές είναι και ίσες;

Προτεινόμενη λύση

Στα άκρα των τεσσάρων ακτίνων OA , OB , OG , OD φέρνουμε κάθετες σε αυτές, οπότε έχουμε τις τέσσερις εφαπτομένες.

Δύο από αυτές είναι κάθετες στη διάμετρο AB και οι άλλες δύο είναι κάθετες στη διάμετρο GD .

Άρα ανά δύο είναι παράλληλες.

Το τετράπλευρο λοιπόν $K\Lambda MP$ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Συγκρίνοντάς τις με το διαβήτη διαπιστώνουμε ότι είναι και ίσες.

